

Mathématiques

Classe de première, enseignement de
spécialité

Sommaire

Préambule	3
■ <i>Intentions majeures</i>	3
■ <i>Quelques lignes directrices pour l'enseignement</i>	4
■ <i>Organisation du programme</i>	5
Programme	6
■ <i>Algèbre</i>	6
■ <i>Analyse</i>	8
■ <i>Géométrie</i>	12
■ <i>Probabilités et statistique</i>	13
■ <i>Algorithmique et programmation</i>	16
■ <i>Vocabulaire ensembliste et logique</i>	16

Préambule

■ Intentions majeures

La classe de première générale est conçue pour préparer au baccalauréat général, et au-delà à une poursuite d'études réussie et à l'insertion professionnelle.

L'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première générale est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis du collège et de la seconde, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- préparer au choix des enseignements de la classe de terminale : notamment choix de l'enseignement de spécialité de mathématiques, éventuellement accompagné de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes, ou choix de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires ;
- assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études au lycée.

Le programme de mathématiques définit un ensemble de connaissances et de compétences, réaliste et ambitieux, qui s'appuie sur le programme de seconde dans un souci de cohérence, en réactivant les notions déjà étudiées et y ajoutant un nombre raisonnable de nouvelles notions, à étudier de manière suffisamment approfondie.

■ Compétences mathématiques

Dans le prolongement des cycles précédents, on travaille les six grandes compétences :

- **chercher**, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. Ceux-ci facilitent en effet le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes est favorisée par la mise en place d'activités rituelles, notamment de calcul (mental ou réfléchi, numérique ou littéral). Elle est menée conjointement avec la résolution de problèmes motivants et substantiels, afin de stabiliser connaissances, méthodes et stratégies.

■ Diversité de l'activité de l'élève

La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. Cette prise de conscience est un élément essentiel dans la définition de leur orientation.

Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe. Parmi ceux-ci, les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers l'autonomie laissée à chacun, le développement des qualités d'initiative, tout en assurant la stabilisation des connaissances et des compétences. Ils doivent être conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité des aptitudes des élèves.

Le calcul est un outil essentiel pour la résolution de problèmes. Il importe de poursuivre l'entraînement des élèves dans ce domaine par la pratique régulière du calcul numérique et du calcul littéral, sous ses diverses formes : mentale, écrite, instrumentée.

■ Utilisation de logiciels

L'utilisation de logiciels (calculatrice ou ordinateur), d'outils de visualisation et de représentation, de calcul (numérique ou formel), de simulation, de programmation développe la possibilité d'expérimenter, favorise l'interaction entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement.

L'utilisation régulière de ces outils peut intervenir selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective adapté ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI ou à un autre point d'accès au réseau local).

■ Évaluation des élèves

Les élèves sont évalués en fonction des capacités attendues et selon des modes variés : devoirs surveillés avec ou sans calculatrice, devoirs en temps libre, rédaction de travaux de recherche, travaux pratiques pouvant s'appuyer sur des logiciels.

■ Quelques lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à créer dans la classe de mathématiques une atmosphère de travail favorable aux apprentissages, combinant bienveillance et exigence. Il faut développer chez chaque élève des attitudes positives à l'égard des mathématiques et sa capacité à résoudre des problèmes stimulants.

L'élève doit être incité à s'engager dans une recherche mathématique, individuellement ou en équipe, et à développer sa confiance en lui. Il cherche, essaie des pistes, prend le risque de se tromper. Il ne doit pas craindre l'erreur, car il sait qu'il peut en tirer profit grâce au professeur, qui l'aide à l'identifier, à l'analyser et la comprendre. Ce travail sur l'erreur participe à la construction de ses apprentissages.

Les problèmes proposés aux élèves peuvent être internes aux mathématiques, provenir de l'histoire des mathématiques, être issus des autres disciplines ou du monde réel, en prenant garde que la simple inclusion de références au monde réel ne suffit pas toujours à transformer un exercice de routine en un bon problème. Dans tous les cas, ils doivent être bien conçus et motivants, afin de développer les connaissances et compétences mathématiques du programme.

Le professeur doit veiller à établir un équilibre entre divers temps d'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;

- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

■ Organisation du programme

Le programme s'organise en cinq grandes parties : « Algèbre », « Analyse », « Géométrie », « Probabilités et statistique » et « Algorithmique et programmation ». Ce découpage n'est pas un plan de cours et il est essentiel d'exploiter les possibilités d'interaction entre ces parties.

Démontrer est une composante fondamentale de l'activité mathématique. Le programme propose quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées : présentation par le professeur, élaboration par les élèves sous la direction du professeur, devoir à la maison, etc.

Le programme propose un certain nombre d'approfondissements possibles, mais en aucun cas obligatoires.

Il peut être judicieux d'éclairer le cours par des éléments de contextualisation d'ordre historique ou épistémologique. L'histoire peut aussi être envisagée comme une source féconde de problèmes clarifiant le sens de certaines notions. Les items « Histoire des mathématiques » identifient quelques possibilités en ce sens. Pour les étayer, le professeur pourra, s'il le désire, s'appuyer sur l'étude de textes historiques.

Programme

■ Algèbre

■ Objectifs

En classe de première, les suites sont présentées d'un point de vue principalement algébrique. L'objectif est que l'élève soit confronté à des systèmes discrets pour lesquels les suites numériques apparaissent comme modélisation adaptée. C'est aussi l'occasion d'aborder le concept de définition par récurrence.

L'élève rencontre différents modes de génération de suites :

- par une formule explicite $u_n = f(n)$;
- par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$;
- par des motifs géométriques ou combinatoires, par exemple suite de nombres figurés, suite décrivant le nombre d'éléments dans une configuration dépendant d'un entier naturel.

Les suites arithmétiques et géométriques sont formalisées. D'autres types simples (suites quadratiques) peuvent être abordés, mais aucune connaissance spécifique à leur sujet n'est au programme.

Dans tous les cas, on peut s'intéresser au passage d'un mode de génération à un autre, et notamment à la recherche d'une formule explicite pour une suite définie d'une autre façon.

Les suites interviennent comme modélisations d'évolutions à temps discret rencontrées dans les autres disciplines : évolution ou actualisation d'un capital, évolution d'une population, décroissance radioactive. C'est l'occasion de réactiver le travail sur l'information chiffrée fait en classe de seconde, notamment sur le taux d'évolution. L'élève doit automatiser le fait qu'une évolution à taux fixe est modélisée par une suite géométrique et percevoir l'intérêt de considérer le rapport de deux termes consécutifs. Lors de l'étude ultérieure de la fonction exponentielle, on réactive le travail sur les suites géométriques en mettant en parallèle évolution géométrique à temps discret et évolution exponentielle à temps continu.

L'étude des suites est l'occasion d'une sensibilisation à l'idée de limite. Toute formalisation est exclue, mais sur des exemples, on s'attachera à en développer une intuition en s'appuyant sur des calculs numériques, des algorithmes de recherche de seuil.

L'étude des fonctions polynômes du second degré réactive les connaissances acquises en seconde (fonction carré, identités remarquables) qu'elle permet de consolider. Il est important de diversifier les registres (algébrique, graphique) et de mettre en valeur les interactions avec l'ensemble du programme : problèmes variés, notamment d'origine géométrique, se ramenant à une équation du second degré ou à l'étude d'une fonction polynôme du second degré (optimisation, variations).

On illustre avec les fonctions polynômes du second degré des notions générales sur les fonctions (taux de variation, calcul de la fonction dérivée, position du graphe de $x \mapsto f(x - m)$) et on fait le lien avec la variance en probabilités et statistique.

Les élèves doivent savoir qu'une fonction polynôme du second degré admet une forme canonique, et être capables de la déterminer dans des cas simples à l'aide de l'identité $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ (méthode de complétion du carré). Le calcul effectif de la forme canonique dans le cas général n'est pas un attendu du programme.

Les élèves sont entraînés à reconnaître et pratiquer la factorisation directe dans les cas qui s'y prêtent : racines apparentes, coefficient de x nul, racines entières détectées par calcul mental à partir de leur somme et de leur produit.

■ Histoire des mathématiques

Bien avant de faire l'objet d'une étude formalisée, les suites apparaissent dans deux types de situations :

- approximation de nombres réels (encadrement de π par Archimède, calcul de la racine carrée chez Héron d'Alexandrie) ;
- problèmes de comptage (les lapins de Fibonacci, etc.).

Les problèmes décrits dans les livres de Fibonacci, ou chez les savants arabes qui le précèdent, se modélisent avec des suites. Oresme calcule des sommes de termes de suites géométriques au XIV^e siècle.

On trouve chez Diophante, puis chez Al-Khwârizmî, des méthodes de résolutions d'équations du second degré. Le travail novateur d'Al-Khwârizmî reste en partie tributaire de la tradition (utilisation de considérations géométriques équivalentes à la forme canonique) et de l'état alors embryonnaire de la notation algébrique, ainsi que de l'absence des nombres négatifs. Les méthodes actuelles sont un aboutissement de ce long cheminement vers un formalisme efficace et concis.

■ Suites numériques, modèles discrets

Connaissances

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations : $u(n)$, u_n , $(u(n))$, (u_n) .
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + \dots + q^n$.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

Capacités associées

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Démonstrations

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.
- Calcul de $1 + q + \dots + q^n$.

Exemples d'algorithme

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Approfondissements

- Tour de Hanoi.

- Somme des n premiers carrés, des n premiers cubes.
- Remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

■ Équations, fonctions polynômes du second degré

Connaissances

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités associées

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - sx + p$.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration

- Résolution de l'équation du second degré.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Héron pour l'approximation numérique des racines en utilisant la forme canonique.

Approfondissements

- Factorisation d'un polynôme du troisième degré admettant une racine et résolution de l'équation associée.
- Factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$, de $x^n - a^n$ par $x - a$.

■ Analyse

■ Objectifs

Deux points fondamentaux du programme de première sont ici étudiés : le concept de dérivée, avec ses applications à l'étude des fonctions, et la fonction exponentielle.

L'étude de la dérivation distingue le point de vue local (nombre dérivé) et le point de vue global (fonction dérivée). Le nombre dérivé est introduit à partir de la perception intuitive de la limite du taux de variation. On n'en donne pas de définition formelle, mais on s'appuie sur :

- des représentations graphiques fournies par les outils logiciels (calculatrice, tableur, logiciel de géométrie dynamique) ;
- le calcul algébrique du taux de variation dans des cas qui s'y prêtent : fonctions du second degré, fonction inverse ;
- le calcul numérique d'expressions $f(a + h) - f(a)$, où h prend des valeurs proches de 0, faisant apparaître une approximation linéaire, par exemple avec $a = 1$ et f étant une des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Il est intéressant d'exploiter ces divers registres dans l'étude d'un même nombre dérivé.

Taux de variation et nombre dérivé gagnent à être illustrés dans des contextes variés :

- en géométrie, ils représentent la pente d'une sécante et la pente d'une tangente ;
- en cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
- dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.

Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution.

Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières).

En liaison avec les autres disciplines, on peut signaler la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pour un taux de variation et $\frac{dy}{dx}$ pour une dérivée : si $y = f(x)$, on peut ainsi écrire $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, en adaptant selon le contexte : $x = f(t)$, $q = f(t)$, etc.

■ Histoire des mathématiques

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation). Le développement d'un calcul des variations chez Leibniz et Newton se fonde sur l'hypothèse que les phénomènes naturels évoluent linéairement quand on leur applique des petites variations. Leurs approches partent de notions intuitives mais floues d'infiniment petit. Ce n'est que très progressivement que les notions de limites et de différentielles, qui en fondent l'exposé actuel, ont été clarifiées au XIX^e siècle.

La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVII^e siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

La trigonométrie a été utilisée chez les Anciens dans des problèmes de natures diverses (géométrie, géographie, astronomie). Elle est à l'époque fondée sur la fonction corde, d'un maniement bien moins facile que les fonctions sinus et cosinus de la présentation actuelle.

■ Dérivation

Connaissances

Point de vue local

- Taux de variation. Sécantes à la courbe représentative d'une fonction en un point donné.
- Nombre dérivé d'une fonction en un point, comme limite du taux de variation. Notation $f'(a)$.
- Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point, comme « limite des sécantes ». Pente. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Point de vue global

- Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée.
- Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée.

- Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
- Pour n dans \mathbb{Z} , fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$.
- Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

Capacités associées

- Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.
- Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal, etc.
- Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente. Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.
- À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point ou la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.
- Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.

Démonstrations

- Équation de la tangente en un point à une courbe représentative.
- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Fonction dérivée de la fonction carrée, de la fonction inverse.
- Fonction dérivée d'un produit.

Exemple d'algorithme

- Écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.

■ Variations et courbes représentatives des fonctions

Connaissances

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités associées

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2 . *Selon la progression choisie par le professeur, cette capacité peut être travaillée dans la section précédente ou à un autre moment.*
- Pour une valeur strictement positive de a donnée, étudier les fonctions polynômes du 3^e degré $f(x) = x^3 + ax$ et $g(x) = x^3 - ax$; faire le lien entre leurs variations et l'étude du signe des fonctions du second degré f' et g' .

Exemple d'algorithme

- Méthode de Newton, en se limitant à des cas favorables.

■ Fonction exponentielle

Connaissances

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. Notation $\exp(x)$.

- Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ et $\exp(x) \exp(-x) = 1$. Nombre e . Notation e^x .
- Pour tout réel a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k , représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Démonstrations

- Unicité d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Approfondissement

- Fonctions dérivables f vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y .

■ Fonctions trigonométriques

Connaissances

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.
- Fonctions dérivées des fonctions cosinus et sinus (admises).

Capacités associées

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x , les cosinus et sinus d'angles associés à x .

Démonstrations

- Calcul de $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

■ Géométrie

■ Objectifs

L'étude de la géométrie plane menée au collège et en seconde a familiarisé les élèves à la géométrie de configuration, au calcul vectoriel et à la géométrie repérée.

En première, on poursuit l'étude de la géométrie plane en introduisant de nouveaux outils. L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

- donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique (produit scalaire) ;
- enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

Les élèves doivent conserver une pratique du calcul vectoriel en géométrie non repérée et la relation de Chasles. La notion générale de barycentre n'est pas au programme, mais le centre de gravité d'un triangle est l'occasion d'un travail sur les vecteurs et le produit scalaire.

■ Histoire des mathématiques

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparaît chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIX^e siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique.

Le calcul vectoriel et le produit scalaire donnent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre AB comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVII^e siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

■ Calcul vectoriel et produit scalaire

Connaissances

- Produit scalaire à partir de la projection orthogonale et de la formule avec le cosinus. Caractérisation de l'orthogonalité.
- Bilinéarité, symétrie. En base orthonormée, expression du produit scalaire et de la norme, critère d'orthogonalité.
- Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. Formule d'Al-Kashi. Expressions du produit scalaire à l'aide de normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.
- Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
- Transformation de $MA^2 + MB^2$ à l'aide du milieu de $[AB]$ et formule de la médiane.
- Centre de gravité d'un triangle. Application à l'intersection des médianes et à la minimisation de l'expression $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Capacités associées

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).

- Utiliser le produit scalaire pour résoudre un problème géométrique : recherche de lieux, de lignes de niveau, optimisation.

Démonstrations

- Formule d'Al-Kashi (démonstration avec le produit scalaire).
- Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (démonstration avec le produit scalaire).
- Transformations de $MA^2 + MB^2$ et de $MA^2 + MB^2 + MC^2$.
- Les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité.

Approfondissements

- Loi des sinus.
- Droite d'Euler d'un triangle.

■ Géométrie repérée

Dans cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Connaissances

- Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur.
- Équation de cercle.
- Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.

Capacités associées

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon, par un diamètre.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.
- Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
- Déterminer l'intersection d'un cercle ou d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec une droite parallèle à un axe.
- Utiliser un repère pour étudier une configuration.

Approfondissements

- Recherche d'une équation du cercle passant par trois points non alignés donnés par leurs coordonnées.
- Recherche de l'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point donné.

■ Probabilités et statistique

■ Objectifs

L'enseignement dispensé en classe de seconde a abordé le modèle probabiliste, dans le cas d'un univers fini. En première, on développe l'étude de ce modèle. L'enseignement s'organise autour des buts suivants :

- introduire la notion de probabilité conditionnelle, sous-jacente dans toute modélisation probabiliste, et mettre en évidence la problématique de l'inversion des conditionnements ;
- formaliser la notion d'indépendance ;
- introduire la notion de variable aléatoire, en lien étroit avec les applications des probabilités ;
- introduire les notions d'espérance, de variance et d'écart type d'une variable aléatoire.

Comme en seconde, on distingue nettement modèle et réalité. Ainsi, une hypothèse d'indépendance fait partie d'un modèle : elle peut être un point de départ théorique ou être la conséquence d'autres

hypothèses théoriques. Lorsque le modèle est appliqué à une situation réelle (par exemple, lancer de deux dés physiques), l'indépendance fait partie de la modélisation et résulte de l'analyse de la situation physique.

Les notions de statistique descriptive vues en seconde sont articulées avec le cours de probabilités. Une population statistique peut être étudiée d'un point de vue probabiliste en considérant l'expérience aléatoire de tirage au sort avec équiprobabilité dans la population. Un lien est ainsi fait entre des notions statistiques (sous-population, proportion, moyenne, écart type) et les notions probabilistes analogues (événement, probabilité, espérance, écart type). La notion de fréquence conditionnelle ne fait pas l'objet d'une étude, mais on donne des situations de calcul de probabilité conditionnelle à partir d'un tableau croisé d'effectifs. Les arbres pondérés sont introduits à partir des arbres de dénombrements vus en seconde.

■ Histoire des mathématiques

Les probabilités conditionnelles peuvent être l'objet d'un travail historique en anglais ; elles apparaissent en effet dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIII^e siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

L'histoire des probabilités contribue à la réflexion sur la codification d'une théorie scientifique. On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVII^e siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

■ Probabilités conditionnelles et indépendance

Connaissances

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

Capacités associées

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $P_A(B)$ et $P_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Monte Carlo : estimation de l'aire sous la parabole, estimation du nombre π .

Approfondissements

- Exemples de succession de plusieurs épreuves indépendantes.
- Exemples de marches aléatoires.

■ Variables aléatoires réelles

Le programme ne considère que des univers finis et des variables aléatoires réelles.

L'objectif est simultanément de développer une intuition autour de l'idée de nombre dépendant du hasard et de formaliser la notion mathématique de variable aléatoire comme fonction numérique définie sur un univers, permettant d'affecter des probabilités aux valeurs possibles de la variable.

Connaissances

- Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
- Loi d'une variable aléatoire.
- Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Capacités associées

- Interpréter en situation et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $P(X = a)$, $P(X < a)$. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer une espérance, une variance, un écart type.
- Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème (mise pour un jeu équitable,...)

Exemples d'algorithmes

- Algorithme renvoyant l'espérance, la variance ou l'écart type d'une variable aléatoire.
- Fréquence d'apparition des lettres d'un texte donné, en français, en anglais.

Approfondissements

- Formule de König-Huygens.
- Pour X variable aléatoire, étude de la fonction du second degré $x \mapsto E((X - x)^2)$.

Expérimentations

Le travail expérimental de simulation d'échantillons prolonge celui entrepris en seconde. L'objectif est de faire percevoir le principe de l'estimation de l'espérance d'une variable aléatoire, ou de la moyenne d'une variable statistique dans une population, par une moyenne observée sur un échantillon.

- Simuler une variable aléatoire avec Python.
- Lire, comprendre et écrire une fonction Python renvoyant la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire.
- Étudier sur des exemples la distance entre la moyenne d'un échantillon simulé de taille n d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable aléatoire.
- Simuler, avec Python ou un tableur, N échantillons de taille n d'une variable aléatoire, d'espérance μ et d'écart type σ . Si m désigne la moyenne d'un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre m et μ est inférieur ou égal à $2\sigma/\sqrt{n}$.

■ Algorithmique et programmation

La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. La classe de seconde a permis de consolider les acquis du cycle 4 autour de deux idées essentielles :

- la notion de fonction ;
- la programmation comme production d'un texte dans un langage informatique.

L'enseignement de spécialité de mathématiques de classe de première vise la consolidation des notions de variable, d'instruction conditionnelle et de boucle ainsi que l'utilisation des fonctions. La seule notion nouvelle est celle de liste qui trouve naturellement sa place dans de nombreuses parties du programme et aide à la compréhension de notions mathématiques telles que les suites numériques, les tableaux de valeurs, les séries statistiques, etc.

Comme en classe de seconde, les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python.

Les notions relatives aux types de variables et à l'affectation sont consolidées. Comme en classe de seconde, on utilise le symbole « \leftarrow » pour désigner l'affectation dans un algorithme écrit en langage naturel.

L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples.

■ Histoire des mathématiques

De nombreux textes témoignent d'une préoccupation algorithmique au long de l'Histoire. Lorsqu'un texte historique a une visée algorithmique, transformer les méthodes qu'il présente en un algorithme, voire en un programme, ou inversement, est l'occasion de travailler des changements de registre qui donnent du sens au formalisme mathématique

■ Notion de liste

La génération des listes en compréhension et en extension est mise en lien avec la notion d'ensemble. Les conditions apparaissant dans les listes définies en compréhension permettent de travailler la logique. Afin d'éviter des confusions, on se limite aux listes sans présenter d'autres types de collections.

Capacités associées

- Générer une liste (en extension, par ajouts successifs ou en compréhension).
- Manipuler des éléments d'une liste (ajouter, supprimer ...) et leurs indices.
- Parcourir une liste.
- Itérer sur les éléments d'une liste.

■ Vocabulaire ensembliste et logique

L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique ne doit pas faire l'objet de séquences spécifiques mais prend naturellement sa place dans tous les chapitres du programme

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in , \subset , \cap , \cup ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple et celle de produit cartésien de deux ensembles.

Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E , on utilise la notation des probabilités \bar{A} , ou la notation $E \setminus A$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à :

- utiliser les connecteurs logiques « et », « ou » ;
- identifier le statut des égalités (identité, équation) et celui des lettres utilisées (variable, indéterminée, inconnue, paramètre) ;
- utiliser les quantificateurs en langage naturel (les symboles \forall et \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- manipuler des implications et des équivalences logiques, employer les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- distinguer une proposition de sa réciproque ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- utiliser des raisonnements par disjonction des cas, des raisonnements par l'absurde, par contraposition.